Problems (特異点の位相幾何学)

AUTHOR(S):

森田, 茂之; 岡, 睦雄; 渡辺, 敬一; 水谷, 忠良

数理解析研究所講究録
170巻 1973年 57-61

Problems

出題　東大　森田茂之
東大　岡　睦雄
都立大　渡辺敬一
学習院大　水谷忠良

§（森田）

1. Rationally parallelizable でない, complex isolated singularity の例を求む。

2. G を $U(n)$ の finite subgroup とする。$\mathbb{C}^n/G$ の quotient singularity の arithmetic genus p を求む。

3. algebraic varity の birational equivalence を、almost complex manifolds の間の同値関係で定式化せよ。

もしそれができた時、準同型 $f: \Omega_*^U \longrightarrow \mathbb{Q}$ がその "birational equivalence" で不変ならば、f は Todd genus の定数倍になるか。((注) これに関しては、最近、肯定的に解答が与えられた。(森田))

4. compact complex analytic space V の奇数次の Sullivan class $S_{2i+1}(V)$ は、0 になるか。($2\dim_{\mathbb{C}}\Sigma V \leqq 2i+1$ なら O.K.)

5 (Hironaka) compact complex manifold V の偶数次 homologies

class x に対して，$[M]=d\cdot x\times 1$ となるような，整数 d と，$V\times P^N$ の almost complex submanifold M が存在するか。但し N は十分大きな整数，homology は整係数。

6. complex manifold V の underlying differentiable manifold V_0 上の almost complex structure を分類せよ。

(例) $\mathbb{C}P(3)$ の degree 4 hypersurface $V(4)$ の underlying differentiable manifold $V(4)_0$ 上には $c_1(\xi)\neq 0$ なる almost complex structure ξ が存在する。もし，この structure が complex structure から由来するものであれば，この $V(4)_\xi$ は $V(4)$ と diffeomorphic な homotopy K3 の例を与える。ここで，complex surface S が K3 であるとは，$c_1(S)=0$ $H_1(S,\mathbb{Q})=0$ なることをいう。K3 surface は $V(4)$ と diffeomorphic である。homotopy K3 surface とは，$c_1(\tilde{S})\neq 0$，$c_1^2(\tilde{S})=0$ なる complex surface $\tilde{S}$ のことをいう。Kodaira は homotopy K3 は $V(4)$ と diffeo か？という問題を出している。

7. (Smoothing Problem)

obstruction theory は2つにわかれる。inner obstruction — Pontrjagin class で書けるかも知れない。outer obstruction — $B\mathrm{cok}J$ にかかわる obstruction。これは topological manifold M の smoothing problem にかんして，次の map の lifting problem に由来している。

p: odd prime

$$\begin{tikzcd}
 & BO\hat{}_p \arrow[d] \arrow[r, phantom, "="] & (BO\hat{}_p)_1 \times (BSO\hat{}_p)_\xi \times * \arrow[d, "\cong"] \\
M \arrow[r, "\text{classifying}"', "\text{map}"] \arrow[ur, dashed, "\exists ?"] & BTop\hat{}_p \arrow[r, phantom, "="] & (BTop\hat{}_p)_1 \times (BSTop\hat{}_p)_\xi \times B\mathrm{Cok}J_p
\end{tikzcd}$$

8. (Outer obstruction に関して) $n \geq 3$, $(4n-1)$-connected, smooth $8n$-manifold M^{8n} で, π-manifold になるための primary obstruction $\chi \in H^{4n}(M, \pi_{4n-1}(SO)) \cong H^{4n}(M, \mathbb{Z})$ が $\chi^2 \neq 0$ をみたし, χ^2 が小さいような M を求む。

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor} \longrightarrow \pi_{8n-1}(S^{4n}) \xrightarrow{H/2} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

§(四)

1. 一つの多項式で定義される $\mathbb{C}^n$ の hypersurface に関し, singular set の dimension と Milnor fibering の fiber の connectivity との関係を求む。

2. type $w=(w_1, \cdots, w_n)$ の weighted homogeneous polynomial で~~定義~~され3 hypersurface が isolated singularity をもつとき, Milnor's fiber の signature を $w_1, \cdots, w_n$ で表わせ。

3. $\{f_t\}_{t\in I}$ を t に関して analytic な, 多項式の族とする。各 f_t が原点 0 を isolated singular point とするとき, $A=\{(z,t)\in \mathbb{C}^n\times I\ ;\ f_t(z)=0\} - \{0\}\times I$ と $B=\{0\}\times I$ が Whitney stratification になる為の十分条件を求む。

予想: ある $\varepsilon>0$ があって, 任意の t と $0<\|z\|\leq\varepsilon$ なる任意の z に対して $\mathrm{grad}\, f_t(z)\neq 0$, ならば O.K.

4. weighted homogeneous polynomial f に関し, $F=f^{-1}(1)$ の Euler number $\chi(F)$ を計算せよ。(isolated singularity の時は計算され

ている。)

5. isolated singularity をもつ projective hypersurface を diffeo で分類せよ。

6. 多項式 f が isolated singularity をもつとき，その local monodromy の periodicity の判定条件を求む。

7. Projective hypersurface の $\mathbb{Q}$-係数 cohomology ring を求めよ。(注) これは解けた。(岡))

§(渡辺) 2-dim. normal singularity の分類について．

$(V, p) \cong (V', p')$ analytic homeo $\Leftrightarrow \mathcal{O}_{V,p} \cong \mathcal{O}_{V',p'}$

1．適当な invariant を求む．

例．geometric genus P_g，arithmetic genus P_a，グラフ．

2．グラフでどの程度 classification ができるか？

・multiplicity や embedding dimension がグラフから求まるか？

・グラフが同じなら近傍は topological に homeo である。しかし．逆は必ずしも成立しない。(グラフの)各頂点の genus と，multiplicity を与えれば，グラフが定まる。逆にグラフが同じなら，geometric genus は一致するかさらに近傍が analytic homeo になるか？　これも一般には成立しない。どういう場合に成立するか？　(例．rational singularity，weighted homogeneous polynomial の時

には成立する。)

§(水谷)

I. manifold M に foliation が存在するか?

0. Euler number $=0$ の場合

1. $\dim M=$ odd の場合

2. $\pi_1(M)=0$, $\dim M=$ odd の場合

3. $\pi_1(M)=0$, $\dim M=7$

II $M\times D^2$ に foliation が存在するか?

0. Euler number $=0$ の場合.

1. いつ specially spinnable になるか?

2. M が $(n-1)$-connected $2n+1$ manifold の場合.

3. M = homotopy sphere の場合.

III 0. spinnable structure が与えられた時, surgery を行え。

1. $K\times D^2$ に trivial spinnable structure が与えられた時, surgery が出来るか?

IV. 0、S^{2n+1} の spinnable structure の分類を行え. (simple の場合は M. Kato による分類がある)

1. Simple spinnable structure の Seifert matrix を求めよ。特に Milnor fibering に関して。

V. M の foliation と $M\times D^2$ の foliation にはどういう関係があるか?